

III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

1) Studiare la seguente funzione irrazionale con indice di radice dispari:

$$y = \sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x - 1}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è una irrazionale con indice di radice dispari, il suo insieme di definizione coincide esattamente con il campo di esistenza del radicando, che nel caso specifico è un polinomio definito su tutta la retta reale, cioè:

$$C.E. = \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione irrazionale, dunque, non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono risolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = -1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -1) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x - 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x+1)^2 \left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+1 = 0 \\ x - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \cong 0,33 \end{cases} \Rightarrow B = (-1, 0), C = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

Si osservi che la scomposizione del radicando, ovvero del polinomio di terzo grado $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ è stata ottenuta utilizzando la regola di Ruffini. Infatti risulta:

$$P(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 1$$

da cui, procedendo per tentativi, si ha:

$$P(x = -1) = 3(-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) - 1 = -3 + 5 - 1 - 1 = 0$$

cioè per $x = -1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	3	5	1	-1
-1	-3	-2	+1	
	3	2	-1	0

III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 1 = (x+1)(3x^2 + 2x - 1)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

utilizzando la formula risolutiva ridotta che ci consente di determinare le soluzioni dei polinomi di secondo grado, cioè:

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-2}{3} = -1 \\ x_2 = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

da cui si ricava:

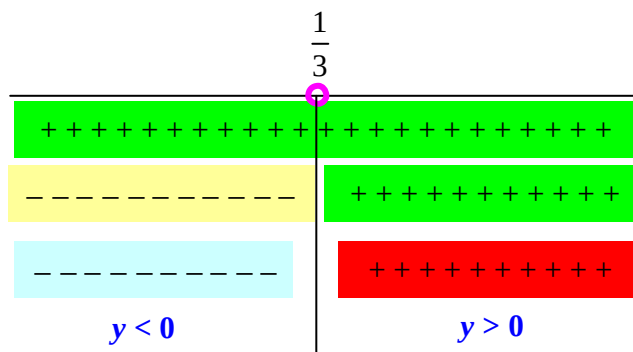
$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^3 + 5x^2 + x - 1 = (x+1)(3x^2 + 2x - 1) = (x+1)(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x+1)^2\left(x - \frac{1}{3}\right) = \\ &= (x+1)^2\left(\frac{3x-1}{3}\right) = \frac{1}{3}(x+1)^2(3x-1) \end{aligned}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x - 1} > 0 \Rightarrow 3x^3 + 5x^2 + x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x+1)^2(3x-1) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (è unquadrato)} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



III Parziale - Compito C
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x - 1} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^3 + 5x^2 + x - 1)} = \sqrt[3]{\pm\infty} = \pm\infty$$

Ne segue che, per

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

Dunque la funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$D\left(\sqrt[3]{3x^3 + 5x^2 + x - 1}\right) = \frac{D(3x^3 + 5x^2 + x - 1)}{3\sqrt[3]{(3x^3 + 5x^2 + x - 1)^2}} = \frac{9x^2 + 10x + 1}{3\sqrt[3]{(3x^3 + 5x^2 + x - 1)^2}}$$

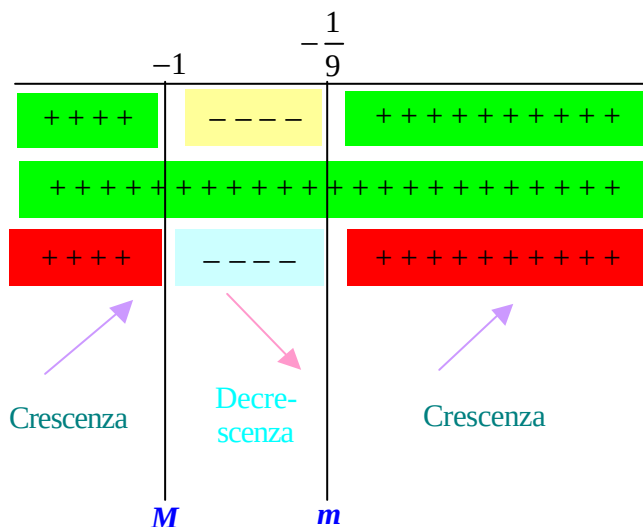
da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{9x^2 + 10x + 1}{3\sqrt[3]{(3x^3 + 5x^2 + x - 1)^2}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 + 10x + 1 > 0 \\ 3\sqrt[3]{(3x^3 + 5x^2 + x - 1)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)\left(x+\frac{1}{9}\right) > 0 \\ \text{sempre (ilradicando è unquadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > -\frac{1}{9} \cong -0,11 \\ \text{sempre} \end{cases}$$

in quanto risulta:

$$9x^2 + 10x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-9}}{9} = \frac{-5 \pm \sqrt{16}}{9} = \frac{-5 \pm 4}{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5-4}{9} = -1 \\ x_2 = \frac{-5+4}{9} = -\frac{1}{9} \end{cases}$$



III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

Dunque la funzione ha un massimo in $x = -1$ ed un minimo in $x = -\frac{1}{9}$.

In particolare si ha:

$$x = -1 \Rightarrow y = 0$$

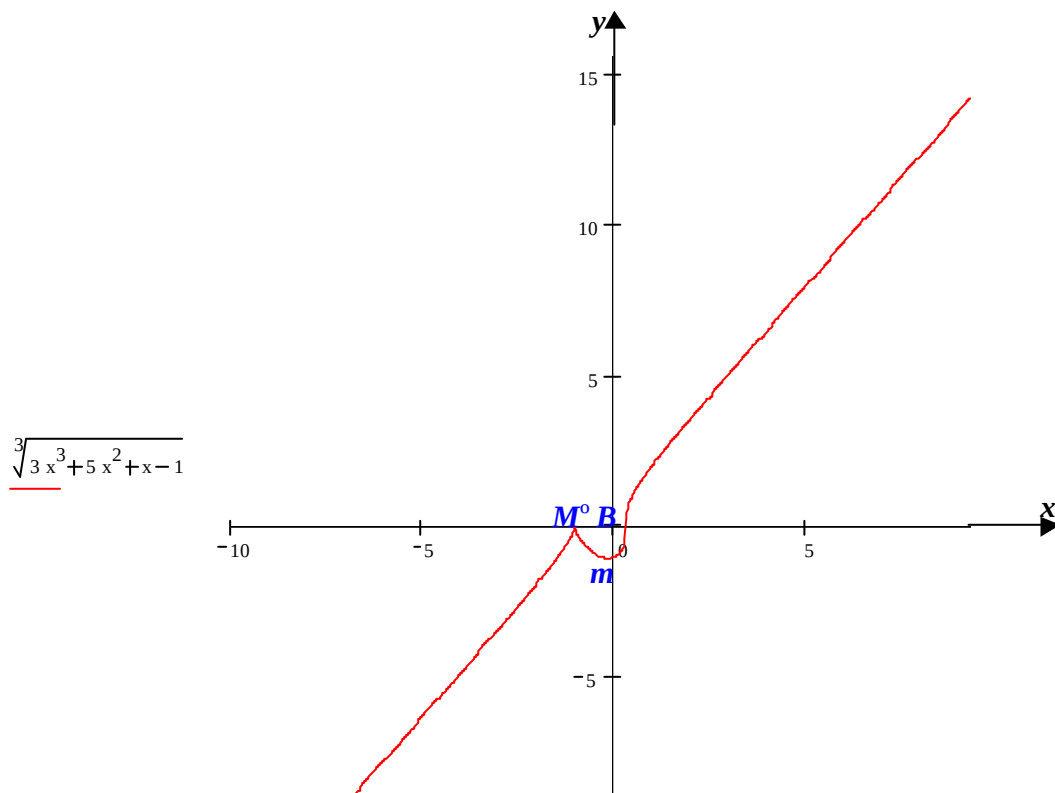
$$x = -\frac{1}{9} \Rightarrow y \cong -1,01$$

Ne segue, quindi, che:

$M(-1,0) \equiv B$ è il punto di *Massimo*

$m_1(-0,11; -1,01)$ è il punto di *minimo*

IL GRAFICO.



III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

2) Studiare la seguente funzione irrazionale con indice di radice pari:

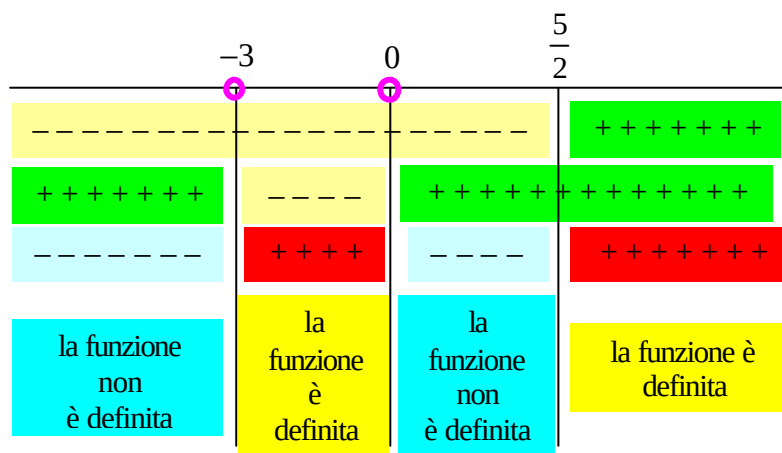
$$y = \sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

La funzione data è irrazionale con indice di radice pari ed il suo radicando è una frazione. Pertanto risulta:

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-5}{x^2+3x} \geq 0, x^2+3x \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ x^2+3x > 0 \\ x^2+3x \neq 0 \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x(x+3) > 0 \\ x(x+3) \neq 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} = 2,5 \\ x < -3 < x < 0 \\ x \neq -3, x \neq 0 \end{cases} \right\}$$



$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -3 < x < 0, \frac{5}{2} \leq x < +\infty \right\}$$

Ne segue che le rette di equazione $x = -3$ ed $x = 0$ sono due *Asintoti Verticali* per la funzione data.

$$A.V. : x = -3, x = 0$$

III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo, in primo luogo, che non ha senso determinare il punto di intersezione della funzione con l'asse delle ordinate, ovvero con la retta di equazione $x=0$, in quanto la funzione in $x=0$ presenta un asintoto verticale. Vediamo, pertanto, se la funzione interseca l'asse delle x . Risulta:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y=0 \\ 0=\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{2x-5}{x^2+3x}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 2x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow A=\left(\frac{5}{2}, 0\right) &\text{ è il punto di intersezione della} \\ &\text{funzione con l'asse } x \end{aligned}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}} > 0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x^2+3x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-5 > 0 \\ x^2+3x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x(x+3) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x < -3, x > 0 \end{cases}$$

Dunque la funzione è sempre positiva all'interno del suo campo di esistenza.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-5}{x^2+3x} \right)} = \sqrt{0} = 0$$

Ne segue che:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

Dunque la retta di equazione $y=0$, ovvero l'asse delle x , è un *Asintoto Orizzontale Destro* per la funzione:

$$\text{A.O.D.: } y=0$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D\left(\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}\right) = \frac{D\left(\frac{2x-5}{x^2+3x}\right)}{2\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}} \cdot \frac{2 \cdot (x^2+3x) - (2x-5) \cdot (2x+3)}{(x^2+3x)^2} =$$

III Parziale - Compito C

29/05/2006

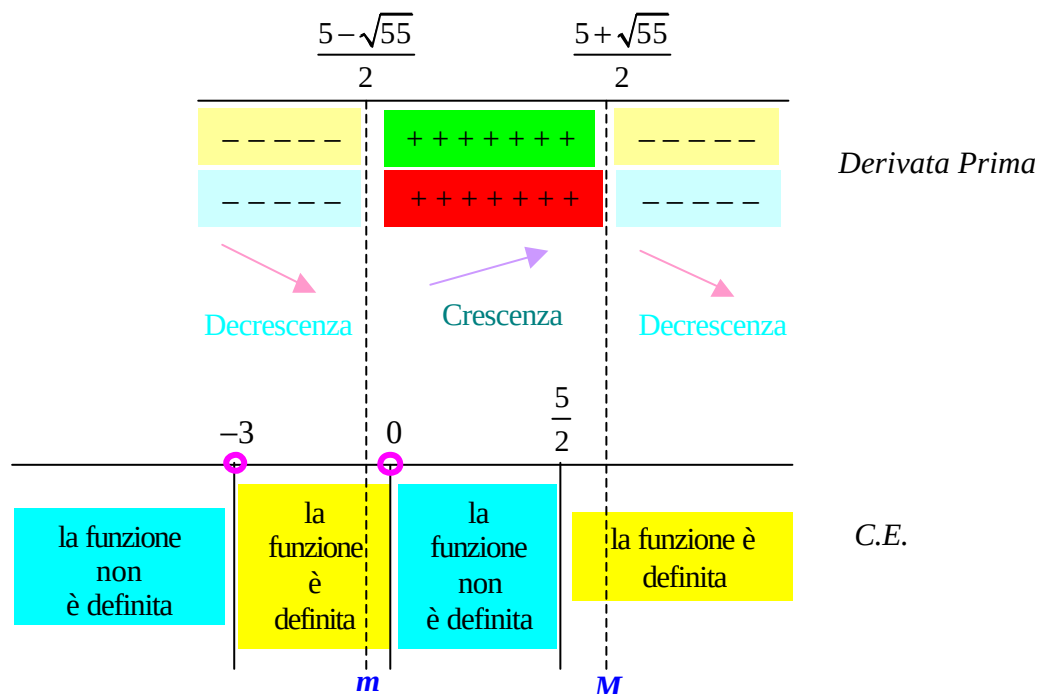
A.A. 2005 – 2006

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}} \cdot \frac{2x^2+6x-4x^2-6x+10x+15}{(x^2+3x)^2} = \frac{-2x^2+10x+15}{2\left(\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}\right)(x^2+3x)^2}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+10x+15}{2\left(\sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}}\right)(x^2+3x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x^2+10x+15 > 0 \\ \sqrt{\frac{2x-5}{x^2+3x}} > 0 \\ (x^2+3x)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-10x-15 < 0 \\ \text{sempre n.e.l.C.E.} \\ \text{sempre} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5-\sqrt{55}}{2} \cong -1,20 < x < \frac{5+\sqrt{55}}{2} \cong 6,20 \\ \text{sempre n.e.l.C.E.} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

Dunque la funzione data ammette un minimo in $x = \frac{5 - \sqrt{55}}{2}$ ed un massimo in $x = \frac{5 + \sqrt{55}}{2}$.

In particolare si ha:

$$x = \frac{5 - \sqrt{55}}{2} \Rightarrow y \cong 1,85$$

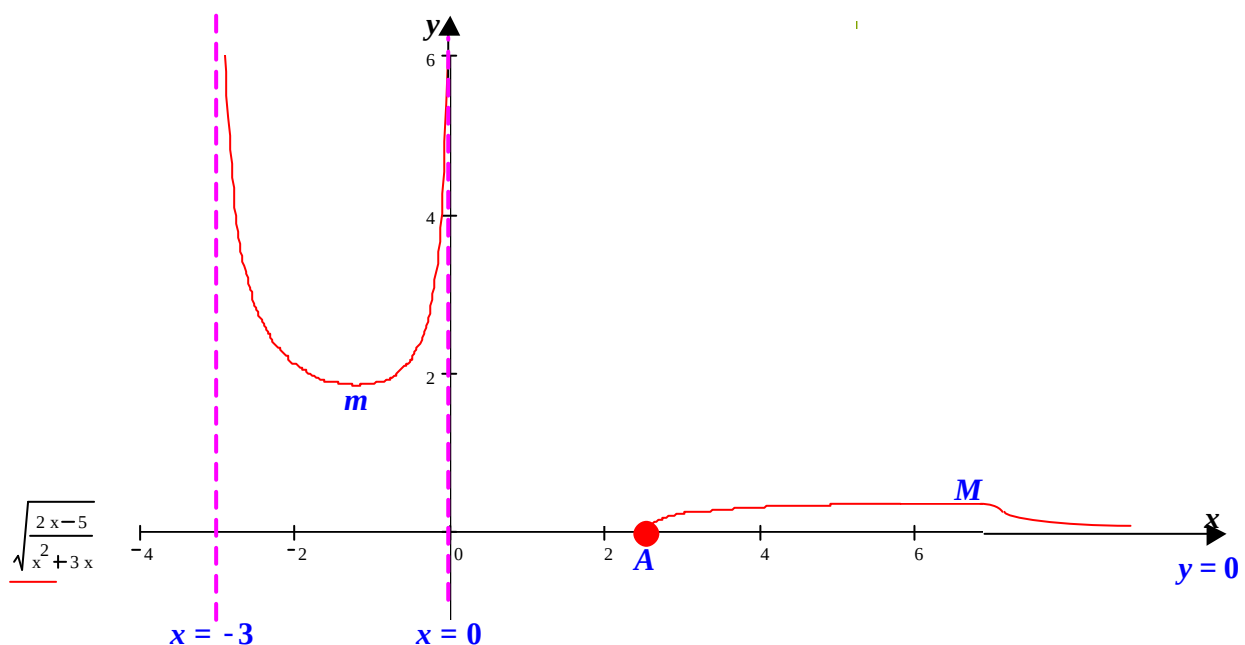
$$x = \frac{5 + \sqrt{55}}{2} \Rightarrow y \cong 0,36$$

Ne segue, quindi, che:

$m(-1,20;1,85)$ è il punto di *minimo*

$M(6,20;0,36)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

Dunque la funzione ha un massimo in $x = -2 - \sqrt{6}$ ed un minimo in $x = -2 + \sqrt{6}$.

In particolare si ha:

$$x = -2 - \sqrt{6} \Rightarrow y \cong 3,04$$

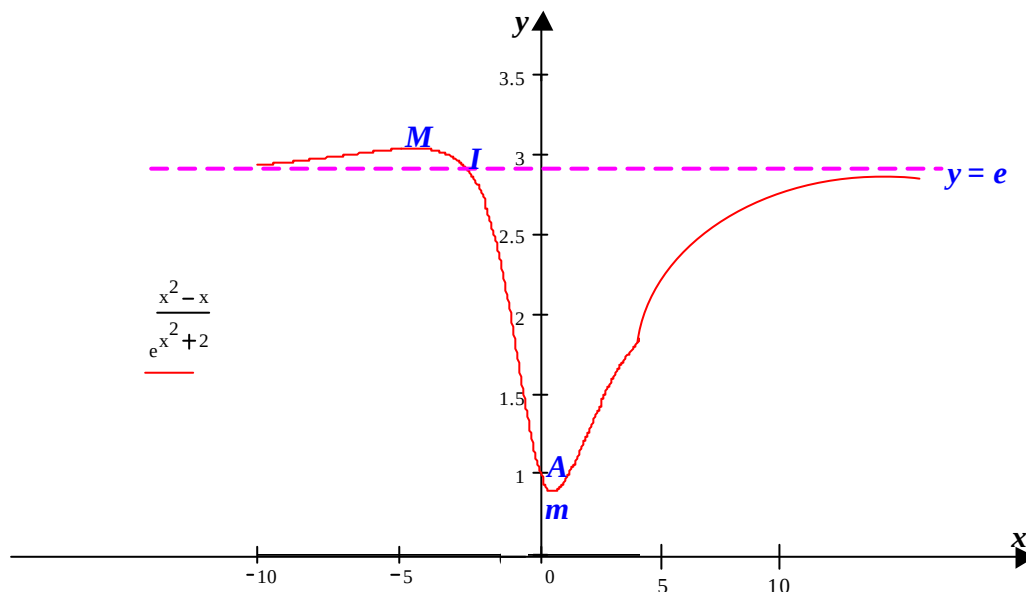
$$x = -2 + \sqrt{6} \Rightarrow y \cong 0,89$$

Ne segue, quindi, che:

$M(-4,45;3,04)$ è il punto di *Massimo*

$m_1(0,45;0,89)$ è il punto di *minimo*

IL GRAFICO.



Risulta, inoltre:

$$I = \begin{cases} y = e^{\frac{x^2-x}{x^2+2}} \\ y = e \end{cases} \Rightarrow e^{\frac{x^2-x}{x^2+2}} = e \Rightarrow e^{\frac{x^2-x}{x^2+2}} = e^1 \Rightarrow \frac{x^2-x}{x^2+2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2-x}{x^2+2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-x^2-2}{x^2+2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-x-2}{x^2+2} = 0 \Rightarrow -x-2=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow I = (-2, e)$$

III Parziale - Compito C
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

4) Studiare la seguente funzione logaritmica:

$$y = \ln\left(\frac{x-1}{x^2+4}\right)$$

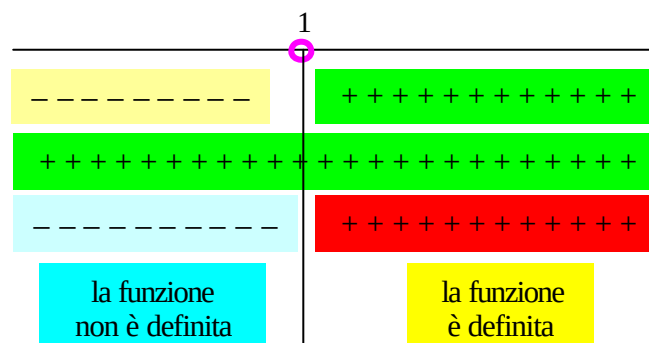
CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è logaritmica ed il suo argomento è una frazione, occorre considerare contemporaneamente il campo di definizione sia della funzione logaritmica (argomento positivo) che della funzione razionale fratta (denominatore diverso da zero):

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+4} > 0 \text{ (per il logaritmo)} \\ x^2+4 \neq 0 \text{ (per la frazione)} \end{cases} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2+4 > 0 \\ x^2+4 \neq 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x > 1 \\ \text{sempre} \\ \text{sempre} \end{cases} \right\}$$

Ne segue subito che la funzione data non ammette *Asintoti Verticali!!!*



$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < +\infty\}$$

III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{x-1}{x^2+4} \right) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x^2+4} \right) \right] = \ln(0) = -\infty$$

Ne segue che:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

cioè la funzione non ha *Asintoti Orizzontali!!!*

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ha:

$$\begin{aligned} D \left[\ln \left(\frac{x-1}{x^2+4} \right) \right] &= \frac{1}{\frac{x-1}{x^2+4}} \cdot D \left(\frac{x-1}{x^2+4} \right) = \frac{x^2+4}{x-1} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x^2+4) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \right) = \\ &= \frac{x^2+4}{x-1} \cdot \left(\frac{x^2+4-2x^2+2x}{(x^2+4)^2} \right) = \frac{x^2+4}{x-1} \cdot \left(\frac{-x^2+2x+4}{(x^2+4)^2} \right) = \frac{-x^2+2x+4}{(x-1)(x^2+4)} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} y' > 0 &\Rightarrow \frac{-x^2+2x+4}{(x-1)(x^2+4)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2+2x+4 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x^2+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-4 < 0 \\ x > 1 \\ \text{sempre} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{5} \cong -1,23 < x < 1+\sqrt{5} \cong 3,23 \\ x > 1 \\ \text{sempre} \end{cases} \end{aligned}$$

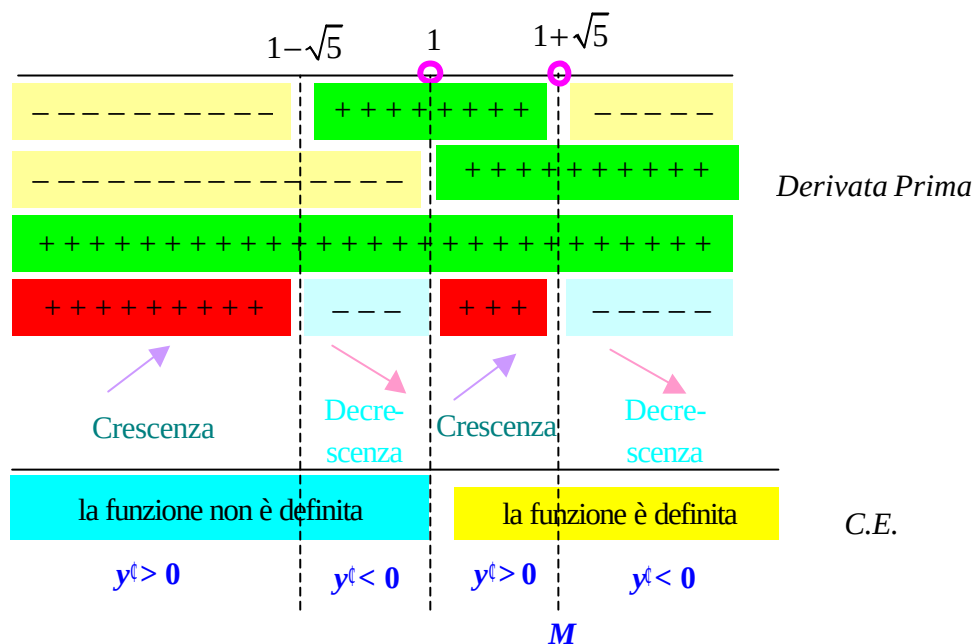
Infatti risulta:

$$x^2-2x-4=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{1} = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1-\sqrt{5} \\ x_2 = 1+\sqrt{5} \end{cases}$$

III Parziale - Compito C

29/05/2006

A.A. 2005 – 2006



Dunque la funzione ha un massimo in $x = 1 + \sqrt{5}$.

In particolare si ha:

$$x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow y \cong -1,86$$

Ne segue, quindi, che:

$M(3,23; -1,86)$ è il punto di Massimo

III Parziale - Compito C
29/05/2006
A.A. 2005 – 2006

IL GRAFICO.

